

EQUACIONANDO TRAVERTINOS: DAS POLINOMIAIS E POLARES ÀS CURVAS DE KOCH

Marcelo dos Santos SILVÉRIO

Ms. - profmarcelo@uol.com.br

FATEC e FKB Itapetininga

GELS – Grupo de Espeleologia Laje Seca

Abstract

In this article we intend to show as it is possible to adjust a mathematical curve to the delineation of known the superior edges of espeleotemas as dams of travertine (gours), in a horizontal section, are for the properties of the polynomial graphs in the systems of Cartesian axes, approached by operations involving Differential Calculus, either for curves standards and classic functions established in polar coordinates or for the geometric processes of the Fractal Theory using the curve of Koch. Finally, we conclude that the best adjustment depends much more on the objectives that if it intends with the graphical regression of that with the microscopical precision of the overlapping of the curve, therefore the imprecision is not tied only with the instruments and used methods for attainment of the data, but also to the ways and dimensions in which the gours if present.

Palavras-chave: travertinos, cavernas, fractais, curva de Koch, gráficos polinomiais, aplicações do cálculo, gráficos polares.

Introdução

A gênese dos espeleotemas nos proporciona uma variabilidade imensa de possibilidades, passando das clássicas dissoluções do carbonato de cálcio, às formações cristalinas ou de origem biológica. Porém, este artigo pretende se deter não na gênese, mas na forma com o qual se apresenta hoje, especificamente, o espeleotema conhecido como represa de travertino, cuja formação se deve pelo fluxo de água e a deposição de calcita nas bordas superiores dessas represas. (Lino e Allievi, 1980, p.50).

Nosso propósito é tentar, com objetivos didáticos, modelar através de um gráfico polinomial restrito a um domínio aceitável a vista superior de alguns travertinos e depois comparar essa modelagem com uma outra, realizada por coordenadas polares e fractais, utilizando as ferramentas do Cálculo Diferencial. Pretendemos mostrar que quaisquer ferramentas usadas são úteis, e o que as difere é quanto ao grau de precisão de aproximação que se deseja: exaltar uma fronteira de contorno ou uma região gradual de separação.

Travertinos

Os travertinos têm uma importância relevante dentro das formações espeleológicas, pois, por apresentarem água rica em carbonato, são viveiros para a formação de inúmeros outros depósitos minerais, como as jangadas, vulcões, dentes-de-cão etc. (Hill & Forti, 1997 p.92).

Essas represas de pedra delineiam bordas com

formato peculiar, apresentando tamanhos diversos, desde os chamados mini-travertinos até os grandes exemplares, que podem se apresentar em formas de escadas, nos quais as águas escorrem em escalonadamente pela pedra, como em curvas de níveis (figura 1).

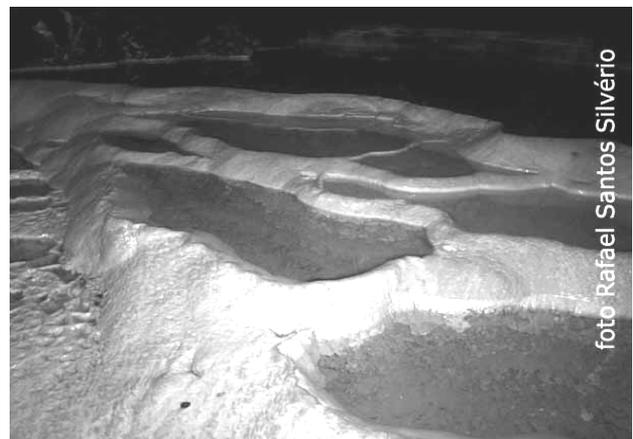


fig 1. Represas de Travertinos. Caverna do Paiva SP42.

Os travertinos curvam-se levemente ao longo dos contornos topográficos, dando formas, com frequência, a uma série de terraços em arcos que são côncavos no sentido da origem da água. Para a formação de represas de travertinos é necessário um grau de inclinação, um fluxo de certa forma contínuo de água e a pré-existência de irregularidades no piso.

Segundo Hill & Forti (1997, p. 93), duas correntes de pesquisadores defendem formas diferentes de interpretar o crescimento dos

travertinos. Em uma delas, quando o fluxo de água retarda, a perda do dióxido de carbono causa uma estrutura côncava no sentido rio-abaixo, e a peça interna das represas crescem mais rapidamente do que a sua divisória. Por outro lado, outros pesquisadores apontam que essas represas podem ser formadas pela tensão superficial da água em um nível que permite que a calcita se cristalize sobre a rocha na fronteira do ar com a água e assim os travertinos podem se transformar em superfícies ásperas ou lisas e em todos os ângulos de inclinação horizontal e vertical.



fig. 2. Travertino seco cujo interior apresenta vulcões e cristais de dente-de-cão.

Delineamento das bordas

Com objetivos voltados ao ensino, podemos observar que as bordas dos travertinos desenhavam curvas bidimensionais e horizontais podendo ser associadas a entes Matemáticos bastante comuns.

Assim, algumas apresentam características de gráficos cartesianos de funções polinomiais, funções exponenciais e logaritmas, trigonométricas, hiperbólicas etc. Por outro lado, outras apresentam curvas fechadas, delimitando bacias com formas irregulares, poligonais ou até de curvas cônicas. Também apresentam imagens que se associam por aproximação a funções de coordenadas polares (em radar). Além disso, quando buscamos precisão, podemos ajustar as irregularidades aparentemente caóticas da vista superior desses espeleotemas em forma de represas com figuras fractais.

Vamos, a seguir, apontar algumas possibilidades didáticas de associações de entidades formais e ideais matemáticas com as formas reais e naturais dos travertinos.

Coordenadas cartesianas e a função polinomial

Ao observarmos algumas bordas das represas de travertinos podemos associar sua curvatura ao gráfico de funções e, em alguns casos, até mesmo uma função decorrente de um polinômio.

Uma função polinomial de grau n , apresentada na forma: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$
em que cada a_i é um coeficiente real, pode possuir até n raízes reais, distintas ou não.

Desse modo, um gráfico como o da figura 3 pode estar representando uma função polinomial do nono grau, pois a sua figura cruza o eixo x , das abscissas, 9 vezes. É possível que algumas das raízes tenham multiplicidade maior (e ímpar), o que faria com que o grau da função polinomial pudesse ainda ser superior a 9.

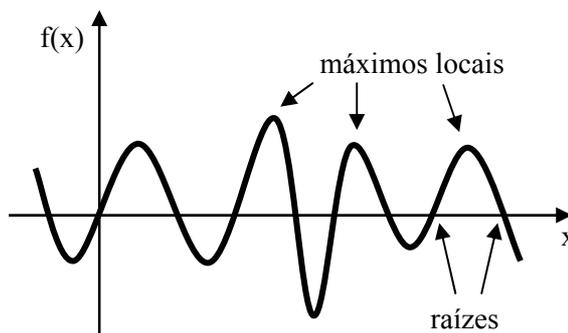


fig. 3. Gráfico de função polinomial

Por exemplo, escolhendo um sistema de eixos xOy convenientes para a borda superior do travertino da figura 4 e decidindo por coordenadas de alguns dos pontos que coincidem com a vista superior podemos equacionar uma função que o represente.

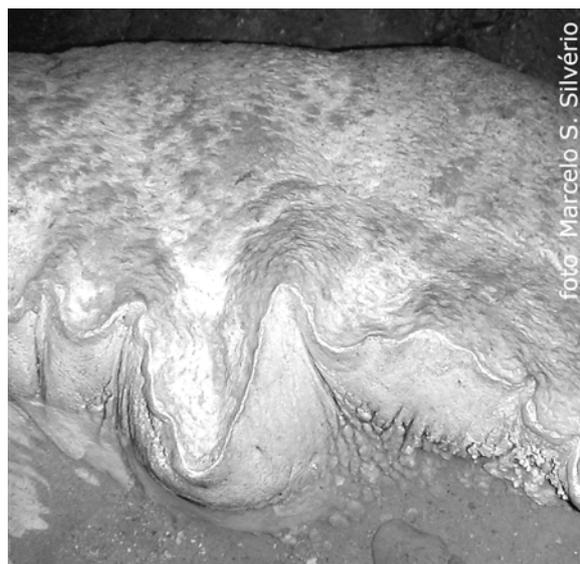


fig. 4. Vista superior de um travertino seco na Caverna do Paiva.

Através de uma regressão polinomial, limitada a um domínio no intervalo $[-1;20]$,

podemos encontrar a seguinte função polinomial do sexto grau: $f: [-1;20] \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 0,00001186x^6 - 0,000346x^5 - 0,00398x^4 + 0,2x^3 - 1,65x^2 + 1,17x + 5,4$

que nos fornece o gráfico da figura 5. Como $f(0)$ é positivo, $f(5)$ é negativo, $f(15)$ volta a ser positivo e $f(20)$ é negativo (calculado facilmente na função), pelo Teorema de Bolzano-Weirstrass, existem raízes de $f(x)$ entre 0 e 5, entre 5 e 15 e entre 15 e 20, o que nos sugere a sinuosidade da curva neste trecho. Estando o domínio limitado no intervalo fechado entre -1 e 20 , a representação só nos mostra três raízes. Os demais cruzamentos com o eixo das abscissas, existindo, estão externos a este intervalo.

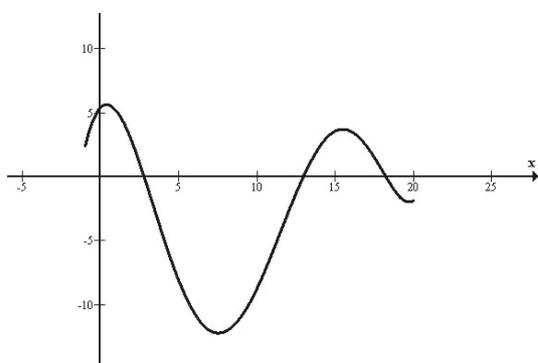


fig. 5. Gráfico de uma função polinomial do sexto grau, mostrando apenas três de suas raízes por estar limitada no intervalo $[-1;20]$.

Notamos na figura 6 como se ajusta a curva sobreposta ao travertino. Mas é importante lembrarmos que, ao transferirmos elementos ideais aos elementos reais perdemos naturalmente precisão. O ajuste de curvas pode até mesmo nos fornecer qual o grau de erro ou desvio que possuímos.

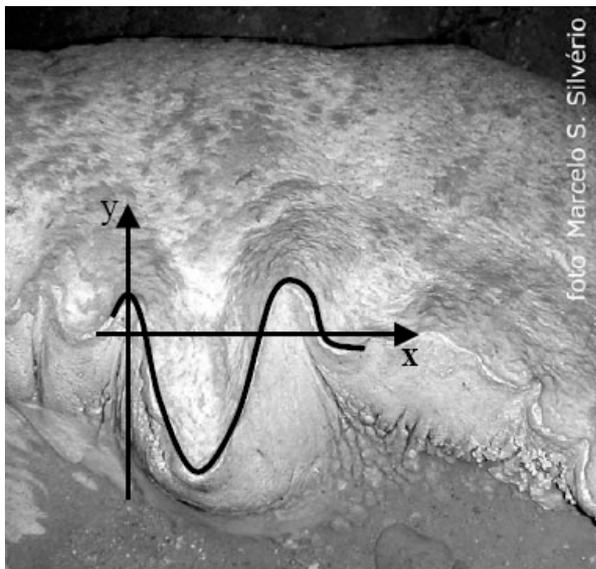


fig. 6. Gráfico da função polinomial ajustado sobre parte da borda do travertino.

A tentativa de modelar o contorno das bordas dos travertinos por funções polinomiais nos leva a alguns impasses. Em primeiro lugar, quando esse contorno apresenta uma curva em forma de gota ou letra ômega (Ω), deixamos de classificar tal relação como uma função. Isto é, matematicamente, esta relação deixa de ser função segundo as definições usuais do Cálculo Diferencial, pois um elemento do domínio estaria associado a duas ou mais imagens, como mostra a figura 7. (Piskunov, 1983, p. 14).

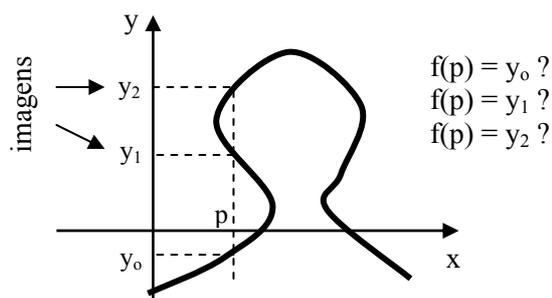


fig. 7. Curva que não representa função no sistema de eixos cartesianos.

É bastante freqüente esta forma de contorno ondulado em represas de travertinos. Algumas vezes esse tipo de formação, observada na figura 8, recebe o nome de Muralha Chinesa (Hill & Forti, 1997 p. 94).



fig. 8. Recortes ondulados das bordas do travertino da Caverna Santana - SP 41.

Ainda assim, é possível recorrer às equações da Geometria Analítica. Por exemplo, podemos delimitar uma área formada pela secção de uma reta e de um círculo:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2 \\ y \geq b-r+k \quad \text{com } 0 < k < r \end{cases}$$

sendo (a,b) o centro e r o raio.

Este tipo de sistema não linear, representado no plano cartesiano, nos dá a figura 9.

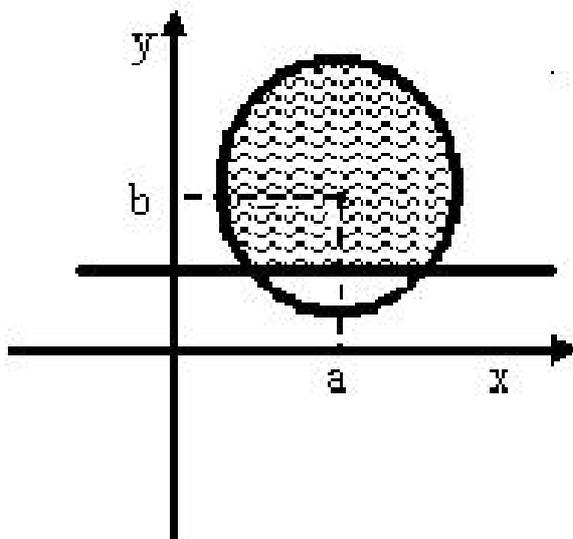


fig. 9. Região representada por equações da Geometria Analítica Plana.

Coordenadas polares

As coordenadas polares associam pontos no plano de Argand-Gauss, cujos valores em \mathbb{C} são dados por números da forma $z = a + bi$, em que i é a unidade imaginária dos números complexos, isto é, $i^2 = -1$.

Podemos escrever um número complexo z na forma polar: $z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$, sendo ρ (lê-se *rho*) o módulo do número complexo (distância do ponto até a origem do sistema) e θ (lê-se *têta*) seu argumento. Assim, usaremos a notação de par ordenado, mas não cartesiano, (ρ, θ) para descrever o número complexo z na forma trigonométrica acima (Churchill, 1975 p. 9).

Por exemplo, na figura 10, o ponto A tem coordenadas polares $(80; 30^\circ)$, pois está a uma distância de 80 unidades do centro (raio) e com um ângulo de 30° em relação à linha de 0° (sentido anti-horário). Do mesmo modo, o ponto B tem coordenadas $(60; 150^\circ)$ e o ponto C, $(40; 300^\circ)$.

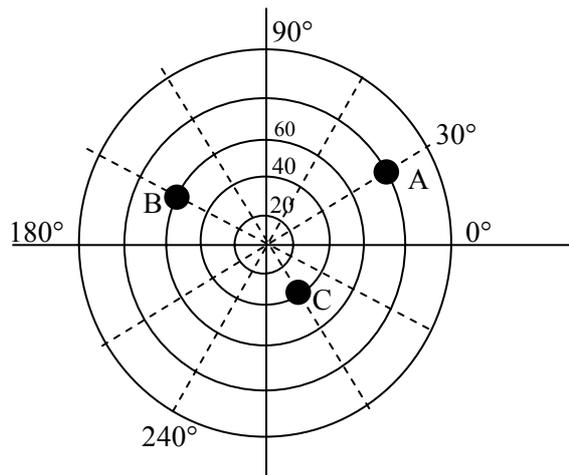


fig. 10. Coordenadas Polares.

Nas funções de variáveis complexas, o conceito de $f(x)$ pode ser estendido para funções de duas variáveis $f(\rho, \theta)$, isto é, cada ponto depende do argumento θ e do raio de um dos círculos concêntricos, ρ , ou, ainda mais aplicável ao nosso modelo, termos ρ em função do argumento θ .

Neste caso, $\rho(\theta)$ pode nos apresentar curvas em coordenadas polares que se aproximam de algumas modelagens que estamos pretendendo.

Uma dessas curvas é a *cardiôide*, estudada por matemáticos que, aos poucos, foram descobrindo suas importantes propriedades: Romer em 1674, Vaumesle em 1678, La Hire em 1708 e Castillon em 1741. (Veloso, 2000 p. 164).

Para θ dado em graus, a equação da cardiôide é $\rho = k \cdot (1 - \cos(\theta\pi/180))$, com k uma constante real positiva. Na figura 11, por exemplo, fazemos $k = 2$ para obter a cardiôide em coordenadas polares:

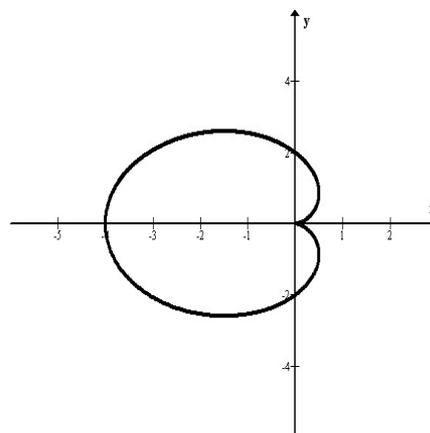


fig. 11. Cardiôide.

Em algumas formações os travertinos apresentam pequenas bacias, represas de curvas fechadas, como mini-lagos. Nestes, representamos imagens das mais variadas formas, inclusive silhuetas que suscitam a idéia de uma cardinóide, como na figura 12.



fig. 12. Escada de travertinos, foto com a região interna recortada.

As curvas em forma de folhas ou pétalas, curvas chamadas *lemniscatas* (do grego, “em forma de laço de fita”) podem também ser aproveitadas, em parte, para representar alguns contornos de travertinos que estamos buscando modelar. A figura 13 foi obtida pela equação $\rho = 4.\sqrt{(\cos 2\theta)}$ plotada por um *software* livre e com código fonte aberto chamado Graph 3.2 (Copyright Ivan Johansen, 2006, *opensoarce*).

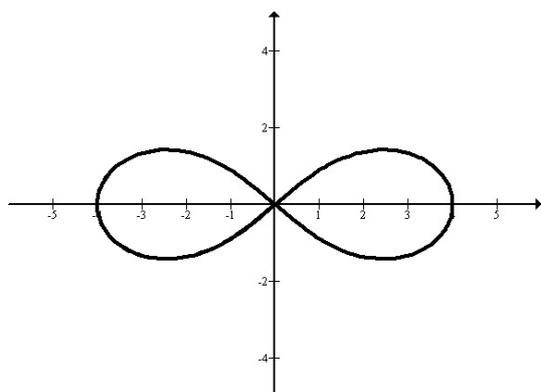


fig. 13. Lemniscata

Para a realização deste trabalho, voltamos a visitar algumas cavernas em busca especificamente de variedade de travertinos. Encontramos o que desejávamos na Gruta do Paiva (SP 42) que possui uma grande quantidade de formações de travertinos, desde os que hoje se encontram secos, passando por travertinos com águas periódicas e os perenes. É uma caverna calcária com desenvolvimento linear de 3800 m e uma hidrologia farta. Nela foi possível observar muitas represas de travertinos, fornecendo-

nos uma gama de dados mais que suficientes para a elaboração do material que pretendíamos. Pudemos encontrar, por exemplo, represas muito bem delineadas, comportando-se como se fossem regiões fechadas de lemniscatas, mostradas na figura 14.

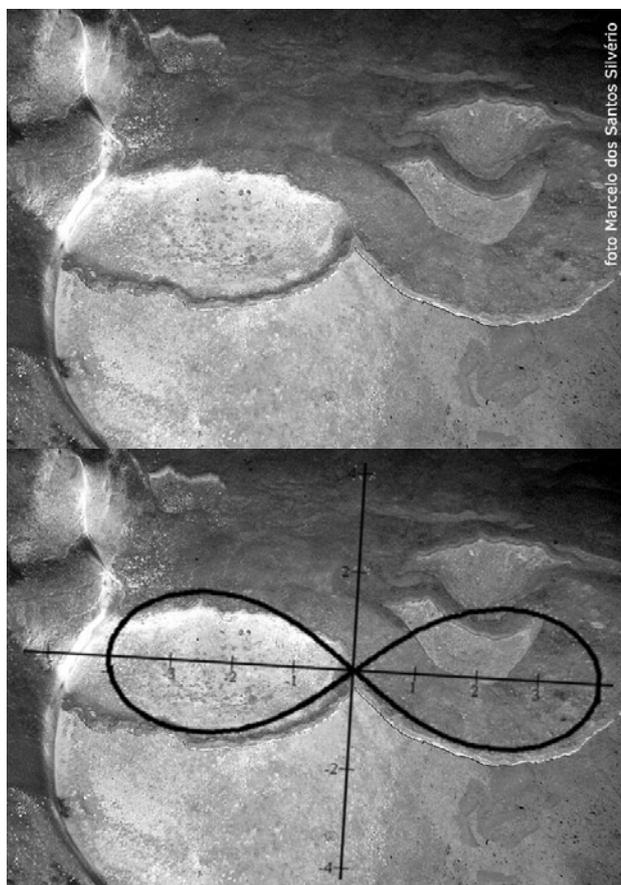


fig. 14. Sobreposição dos mesmos travertinos. Na parte inferior reduzidos à curvas polares.

Alterando os parâmetros da lemniscata e sobrepondo os gráficos, podemos ter a representação de uma figura equacionável, que nos faz alusão aos movimentos do fluxo de água em direção às paredes do travertino, num dos sentidos da curva.

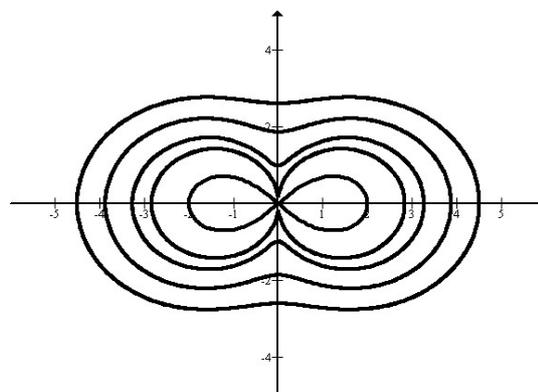


fig. 14. Sobreposição de lemniscatas com variação de parâmetros de cada uma das cinco funções.

Na figura 15, por exemplo, o leve toque sobre a água represada numa bacia com paredes de travertinos provoca uma ondulação semelhante àquela que seria ocasionada pelo gotejar sobre a água. Notando o movimento das ondas, pode ser justificável, neste caso, a modelação por um feixe de lemniscatas e não por círculos concêntricos. A melhor curva que se adequará depende de uma série de parâmetros, incluindo o leve movimento contínuo do escoamento da água, que segue um sentido pré-estabelecido.

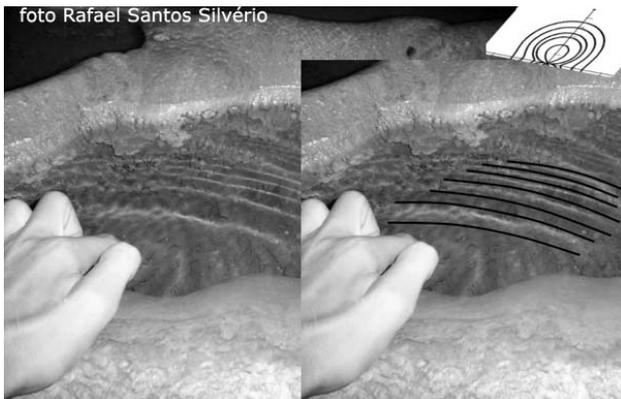


fig 15. Sobreposição de duas imagens da ondulação da água represada por um travertino, uma delas modelada por secções de lemniscatas.

Dimensões fracionárias e os fractais

A Matemática considera, há milhares de anos, a dimensão *zero* associada ao ponto, dimensão *um* associada a uma reta, *dois*, associada a um plano e *três*, associada ao espaço. A quarta dimensão geométrica não se trata, ao contrário do que pensam algumas pessoas, da dimensão tempo, mas sim de uma referência ao R^4 , cujas equações permitem projetar a existência matemática de hipercubos, hiperesferas etc.

Entretanto, no final do século XIX e início do século XX, segundo Mandelbrot (1998, p. 20), passou a ser sistematizada uma teoria consistente utilizando dimensões fracionárias. De maneira breve e intuitiva, as dimensões entre 1 e 2, como, por exemplo, $3/2$ ou \log_4/\log_3 , passaram a se referir a um objeto que possui área nula, porém comprimento infinito, como o conceito da linha recortada em zigue-zague do contorno de represas de travertinos. Por outro lado, dimensões entre 2 e 3 foram associadas a objetos que possuem volume zero, mas área infinita, como a superfície de espeleotemas conhecidos por coralóides.

As experiências nos levam a crer que, se quisermos ou necessitarmos de melhor precisão para equacionar a linha superficial de um travertino, as ferramentas matemáticas atuais nos sugerem

recorrer à geometria dos fractais.

De acordo com Silva (1997, p.23), a geometria fractal nos permite entender o processo genético da formação dos espeleotemas. Em algumas formações, a solução “ao depositar” os cristais de calcita o faz por frações que se justapõem e recobrem de forma aleatória a rocha como um todo. A precipitação, dissolução ou a cristalização são caóticas, e acontecem devido a pequenas catástrofes ambientais (como o gotejamento ou o fluxo irregular de água).

Como o objeto desta pesquisa é o espeleotema travertino e, mais especificamente ainda, seu contorno da borda superior, torna-se adequado que recorramos a um fractal plano, isto é, cuja dimensão esteja realmente entre 1 e 2. Os melhores entes geométricos padronizados que se encaixam no nosso propósito são as diversas variações das Curvas de Koch e as curvas de Peano, mas vamos nos deter nos primeiros casos.

O modelo fractal original da curva de Koch pode ser construído, segundo Barbosa (2002, p.38), dividindo-se um segmento e reta em 3 partes iguais, substituindo-os por 4 outros congruentes, sendo que o intermediário dá lugar a dois lados de um triângulo equilátero e, depois, reproduzindo infinitamente esses passos em cada um dos segmentos obtidos, como na seqüência da figura 16.

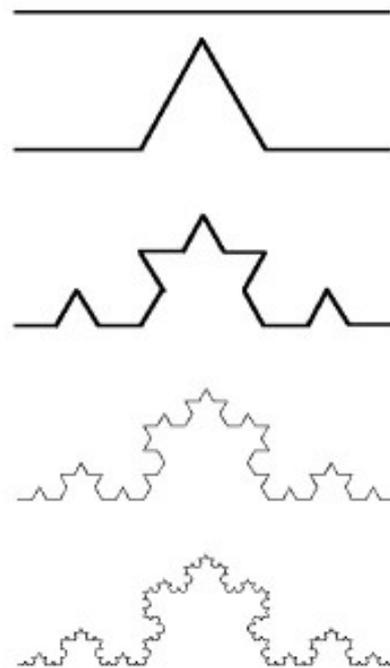


fig. 16. Construção da curva de Koch.

A curva de Koch é um fractal de dimensão \log_4/\log_3 (um segmento de dimensão 1 é

seccionado em três pedaços e sua repetição nos leva a 4 outros congruentes), que equivale aproximadamente a 1,26, segundo a teoria de Hausdorff-Besicovitch, trazida de dimensões de espaços topológicos.

Variações no processo original de construção de fractal de Koch nos permite obter outras curvas de grande interesse para este artigo. As formações de linhas fractais são auto-semelhantes, ou seja, cada uma das suas partes é uma reprodução idêntica, porém menor, do todo. Na figura 17 vemos a secção de um segmento de comprimento 1 em outras partes, com dimensões $\log 5 / \log 4$, $\log 7 / \log 4$ e $\log 7 / \log 5$.

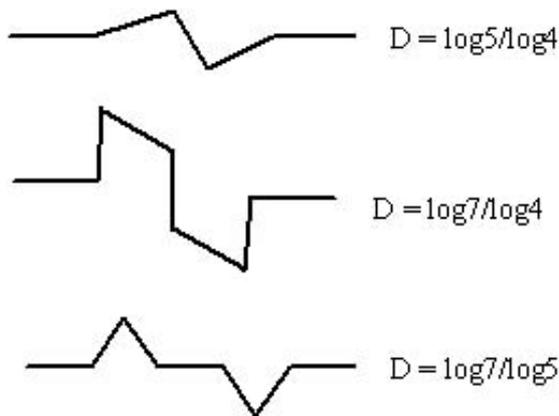


fig. 17. Outros padrões fractais semelhantes à curva de Koch

Observamos que o terceiro e o primeiro padrão acima geram as linhas fractais da figura 18.

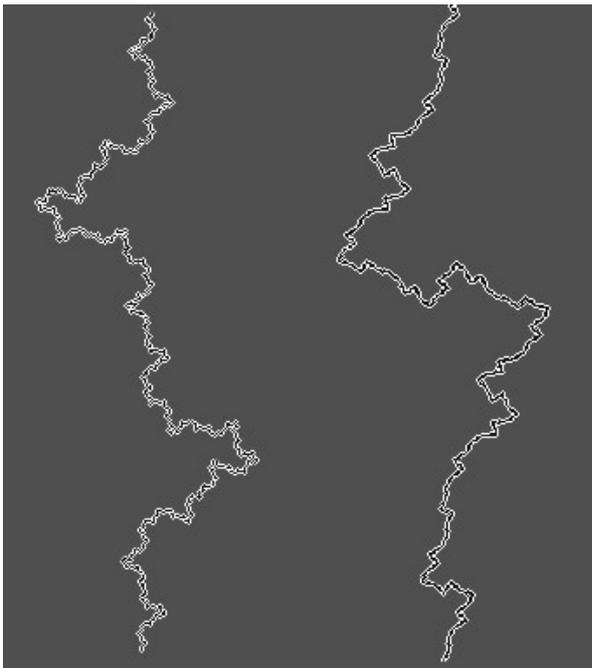


fig 18. Variações da curva de Koch com dimensões $\log 7 / \log 5$ (esquerda) e $\log 5 / \log 4$ (direita).

Ao procurarmos ajustar as bordas dos travertinos com os fractais padronizados, obtemos aproximações muito interessantes. Notemos a figura 19, em que adaptamos um dos padrões da figura 18, refletindo secções com um certo período.

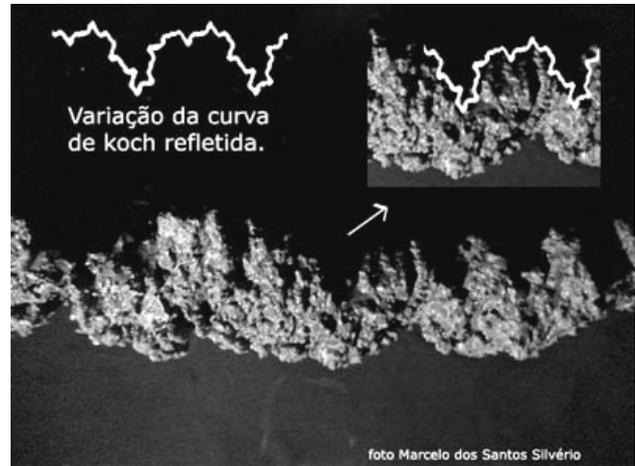


fig. 19. Ajuste de um travertino encontrado na Caverna do Paiva por um fractal auto-similar.

Os ajustes mais finos ocorrem com a utilização de padrões brownianos aleatórios. O caos impera nas formações da natureza, pois o acaso está presente em cada momento da sua gênese. Os estudos do início do século XX agregaram as variações probabilísticas aos fractais, o que foi ao encontro, mais tarde, aos modelos da Mecânica Quântica e a Entropia Termodinâmica. Assim, os ajustes das “peças” fractais aos moldes reais que o ambiente nos apresenta, passou a ser mais significativo e com mínimo de desvios e erros.

Fractal passa a ser definido como uma figura geométrica em que suas partes têm a mesma forma ou estrutura que o todo, numa escala diferente e até mesmo “podendo estar um pouco deformada” Mandelbrot (1998, p. 170).



fig. 20. Pequeno travertino com sinuosidade aperiódica na gruta SP42.

Ainda que este trabalho não tenha se preocupado com a gênese e o desenvolvimento das represas de travertinos, conhecidos nas comunidades internacionais com o nome usual francês de “gours”, não há dúvidas de que esse enfoque é também essencial num estudo mais aprofundado sobre o equacionamento desses espeleotemas. Suas dimensões, variando de mini-travertinos a gigantes não implicam, necessariamente, em seu tempo de formação. Mas, certamente, boa parte deles pode ter o contorno da sua borda superior ajustado por um fractal, com melhor ou pior precisão.



fig. 21. No percurso do rio, cerca de 60 metros de travertinos se apresentando como barreiras e escadas naturais na Caverna do Paiva – Ribeirão Grande SP.

Conclusão

Quando procuramos equacionar e reduzir um objeto real às formas clássicas das equações ou figuras matemáticas, geralmente estamos, assim como Platão há mais de dois milênios, aludindo ao mundo das idéias. Por isso, é preciso estar ciente das imperfeições dos modelos e, mesmo que rigorosos com a Matemática, sermos mais ponderados conosco como observadores.

Torna-se fundamental estabelecer, como já dissemos, quais os propósitos que temos ao

equacionar as bordas desses espeleotemas. As funções e os modelos fractais simplificados, por possuírem uma regularidade ou uma irregularidade sistemática, não possuem uma desordem suficiente para igualar sem erros às formas reais.

Além disso, os modos com os quais os travertinos se apresentam podem aumentar a imprecisão das equações. As próprias formas reais, como mostra a figura 22, por serem tridimensionais, sempre terão espessura, largura e comprimento e, mesmo que queiramos intuir, o erro de um modelo bidimensional ou de dimensão fractal menor que 2 só tende a aumentar quando a espessura das bordas do nosso objeto, aqui o travertino, deixa de ser, de longe, desprezível.



fig. 22. Um travertino com espessura da borda maior que uma lanterna.

Porém, este fato não desqualifica o trabalho de modelar através de curvas. Apenas nos mostra que as equações nos levam a aproximações significativas da realidade, que podem oferecer dados importantes sobre ela, mesmo que a gama de variáveis incluídas na formação da natureza seja muito maior que aquela que podemos trabalhar nas equações e regressões matemáticas.

Crédito das fotos

figs. 1 e 15: Rafael Santos Silvério

fig. 2: Sérgio Ravacci de Oliveira Júnior

fig 12: Manoel dos Santos Silvério Neto

figs. 4, 6, 8, 14, 19 a 22: Marcelo dos S. Silvério

Bibliografia

BARBOSA, Ruy M. Descobrimos a geometria fractal. Autêntica. Belo Horizonte: 2002.

CHURCHILL, Ruel V. Variáveis complexas e suas aplicações. Macgraw-Hill. São Paulo: 1975.



- HILL, Carol; FORTI, Paolo. Cave minerals of the world. National Speleological Society. Huntsville, USA: 1997.
- LINO, Clayton F. Cavernas: o fascinante Brasil subterrâneo. Gaia. São Paulo: 2001.
- LINO, Clayton; ALLIEVI, João. Cavernas brasileiras. Melhoramentos. São Paulo: 1980.
- MANDELBROT, Benoit. Objectos fractais. Gradiva. Lisboa: 1998.
- PISKUNOV, N. Cálculo diferencial e integral. Tomo I. Editora Mir. Moscou: 1983.
- SILVA, Claudio Maurício T. Espeleotemas: crescimentos fractais. Revista Espeleologia Ano VIII Vol.8 p. 23-28 SEE. Ouro Preto: 1997.
- VELOSO, Eduardo. Geometria: temas actuais. Instituto de Inovação Educacional. Lisboa: 2000.